Magnetostática.

Aquí se busca las similitudes entre los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ estáticos. De esta manera se puede aprovechar el conocimiento que ya se tiene acerca de $\boldsymbol{E}$ estático para aplicarlo a $\boldsymbol{H}$ estático. Inclusive, se puede observar la similitud entre el comportamiento de $\boldsymbol{E}$ estático y $\boldsymbol{H}$ estático. Sin embargo, existen diferencias entre estos dos campos ya que cada uno tiene su origen diferente al otro.
Como en el caso del campo $\boldsymbol{E}$ estático, se empieza a partir de las leyes básicas del campo, esta vez

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \quad \text{compare con} \quad \nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \qquad 1$$

$$\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{H}=0 \quad \text{compare con} \quad \nabla\cdot\epsilon\boldsymbol{E}=0 \qquad 2$$

En el caso electrostático, $\boldsymbol{E}$ es un campo conservativo (irrotacional) y por tener su rotacional igual a cero, puede expresarse por $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi_e$ - una consecuencia además es

$$\nabla^2\varphi_e=-\rho/\epsilon \quad \text{o} \quad \nabla^2\varphi_e=0$$

las ecuaciones de Poissón y Laplace respectivamente. Ahora para la magnetostática, se observa que $\boldsymbol{H}$ *no* es irrotacional pero sí es sin divergencia o solenoidal. Sin embargo, el comportamiento matemático de estos dos campos en regiones libres de fuentes en el espacio es idéntico. Las leyes básicas de campo requieren que los campos sean sin divergencia e irrotacional cuando $\rho = 0$ y $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$. Se encuentran patrones de campo magnético en regiones en las cuales $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ gobernados por las mismas funciones matemáticas que se aplican al campo $\boldsymbol{E}$ estático en una región con $\rho = 0$.

El vector potencial magnético $\boldsymbol{A}$.

Lo primero que se observa es que $\boldsymbol{H}$ estático no puede expresarse en términos del gradiente de un escalar. Si fuese así, con $\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m\rightarrow\nabla\times\boldsymbol{H}=-\nabla\times\nabla\varphi_m\equiv\boldsymbol{0}$ en *todos* los puntos, que viola la ley básica de $\boldsymbol{H}$ estático: $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$, y en particular cuando $\boldsymbol{J}\neq\boldsymbol{0}$.
Pero se puede satisfacer $\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{H}=0$ en todo el espacio al expresar $\mu_0\boldsymbol{H}$ en términos de un potencial vectorial $\boldsymbol{A}$, así:

$$\mu_0\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad 3$$

Puesto que la divergencia del rotacional de *cualquier* vector es idénticamente igual a cero en todos los puntos, $\mu_0\boldsymbol{H}$ como expresado en la ecuación (3), *siempre* va a satisfacer la relación $\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{H}=0$, para cualquier función vectorial arbitraria $\boldsymbol{A}$. Entonces, se ve que el vector de potencial $\boldsymbol{A}$ es equivalente al potencial escalar φ_e. Al expresar la relación

$$\mu_0\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A},$$

la consecuencia es

$$\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{H}=0$$

siempre para todos los campos magnéticos estáticos en el espacio libre.
En la electrostática, después de expresar $E=-\nabla\varphi_e$, al sustituir por $\boldsymbol{E}$ en $\nabla\cdot\epsilon\boldsymbol{E}=\rho$ se consiguió $\nabla^2\varphi_e=-\rho/\epsilon$. También aquí al sustituir

$\mu_0\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ en $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$, se obtiene

$$\nabla\times\mu_0\boldsymbol{H}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu_0\boldsymbol{J} \qquad 4$$

Existe la identidad vectorial

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A} \qquad 5$$

En la ecuación (5), el operador Laplaciano actúa sobre cada componente cartesiano de $\boldsymbol{A}$,

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla^2 A_x\mathbf{1}\boldsymbol{x}+\nabla^2 A_y\mathbf{1}\boldsymbol{y}+\nabla^2 A_z\mathbf{1}\boldsymbol{z} \qquad 6$$

También se escoge $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ (el calibrado de Coulomb) que se puede hacer sin afectar el rotacional de $\boldsymbol{A}$. Además las leyes de Maxwell no se violan. Así, se tiene

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J} \qquad 7$$

Esto implica

$$\nabla^2 A_x=-\mu_0 J_x \qquad 8$$

$$\nabla^2 A_y=-\mu_0 J_y \qquad 9$$

$$\nabla^2 A_z=-\mu_0 J_z \qquad 10$$

Estas ecuaciones (8), (9) y (10) son ecuaciones muy parecidas a la ecuación de Poissón visto antes, $\nabla^2\varphi_e=-\rho/\epsilon$. Como en la electrostática se dividen en dos casos:

(1) Las fuentes de corriente estáticas fijas son conocidas en todas las regiones y
(2) Las fuentes de corrientes estáticas fijas son conocidas sólo en una región delimitada junto con unas condiciones de borde en todos los puntos que están en la superficie que encierra la región.

El campo magnético de corrientes fijas conocidas.
Se asume que existe una corriente fija, independiente del tiempo, conocida de densidad $\boldsymbol{J}$ en el espacio libre, como se ve en la siguiente figura 1.

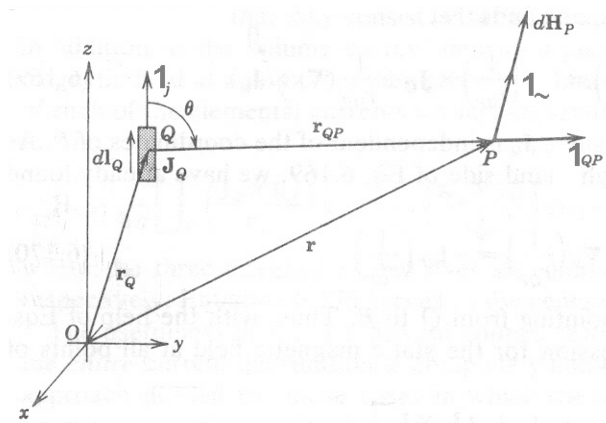

Figura 1.
Un elemento de corriente y el campo magnético producido.

Si se tratara del potencial eléctrico φ_e, el campo de potencial en cualquier punto P puede expresarse como la superposición de potenciales de cargas puntuales, cada una actuando sólo, independiente de las demás.

$$\varphi_{eP}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint_V \frac{\rho_Q dV_Q}{r_{QP}} \qquad 11$$

En la ecuación (11) ρ_Q es la densidad de carga volumétrica en Q (la fuente) y r_{QP} es la magnitud de la distancia entre Q y P (punto de observación). Se sabe que φ_e debe satisfacer $\nabla^2\varphi_e=-\rho/\epsilon_0$ en todo el espacio. Como se vio la similitud entre φ_e y A_x, A_y, A_z, del vector $\boldsymbol{A}$ con respecto a la ecuación de Laplace sobre el vector $\boldsymbol{A}$,

$$(\varphi_e)_P \leftrightarrow (A_x)_P, \quad (J_x)_Q \leftrightarrow \rho_Q, \quad \mu_0 \leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad 12$$

Usando la analogía de $\nabla^2\varphi_e=-\rho/\epsilon_0$, se tiene,

$$(A_x)_P=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{(J_x)_Q}{r_{QP}} dV_Q \qquad 13$$

En la ecuación (13) J_x es la componente en la dirección x que fluye en un elemento de volumen dV_Q en el punto Q y r_{QP} es la magnitud de la distancia entre Q y P. Entonces,

$$\boldsymbol{A_P}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{(\boldsymbol{J})_Q}{r_{QP}} dV_Q \qquad 14$$

es la solución de $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$. El campo magnético que resulta del campo vectorial de potencial magnético $\boldsymbol{A}$, está dado por $\nabla_P\times\boldsymbol{A_P}$.

$$\mu_0 \boldsymbol{H_P} = \nabla_P \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\boldsymbol{J_Q}}{r_{QP}} dV_Q \qquad 15$$

Nótese que la diferenciación se realiza con respecto a las coordenadas del punto P donde $\boldsymbol{A}_P$ se evalúa, mientras que la integración de volumen se realiza más bien con respecto a las coordenadas del punto Q donde se encuentra $\boldsymbol{J}_Q$. Como las coordenadas de P son independientes de las coordenadas de Q, las dos operaciones pueden intercambiarse así:

$$\mu_0 \boldsymbol{H_P} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla_P \times \frac{\boldsymbol{J_Q}}{r_{QP}} dV_Q \qquad 16$$

Al diferenciar por partes, se obtiene

$$\nabla_P \times \left(\frac{\boldsymbol{J_Q}}{r_{QP}} \right) = \nabla_P \left(\frac{1}{r_{QP}} \right) \times \boldsymbol{J_Q} + \frac{1}{r_{QP}} (\nabla_P \times \boldsymbol{J_Q}) \qquad 17$$

En la ecuación (17) $\nabla_P \times \boldsymbol{J_Q} \equiv 0$ ya que $\boldsymbol{J}_Q$ es independiente de las coordenadas de P. Además,

$$\nabla_P \left(\frac{1}{r_{QP}} \right) = -\frac{1}{r_{QP}^2} \boldsymbol{1_{QP}} \qquad 18$$

donde $\mathbf{1}_{QP}$ es el vector unitario que apunta desde Q hacia P. De esta manera,

$$\boldsymbol{H_P} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\boldsymbol{J_Q} \times \boldsymbol{1_{QP}}}{r_{QP}^2} \right) dV_Q \qquad 19$$

En la ecuación (19) la integración de volumen se realiza sobre toda la distribución de corriente.

Se puede ver el significado de la ecuación (19) al considerar el campo magnético establecido por un elemento de corriente $\boldsymbol{J}_Q dV_Q$ en Q que actúa sólo, con las otras corrientes puestas a cero. Se tiene, entonces

$$d\,\boldsymbol{H_P} = \frac{(\boldsymbol{J_Q} dV_Q) \times \boldsymbol{1_{QP}}}{4\pi r_{QP}^2} \qquad 20$$

como la contribución diferencial del campo magnético en P debido a la corriente $\boldsymbol{J}_Q$ en el elemento de volumen dV_Q en el punto Q. Si dV_Q se toma como un cilindro circular de longitud dl_Q (paralelo a $\boldsymbol{J}_Q$) y de área transversal da_Q, entonces

$$\boldsymbol{J_Q} dV_Q = (\boldsymbol{J_Q} da_Q) dl_Q = I_Q dl_Q \boldsymbol{1_J} = I_Q d\,\boldsymbol{l_Q} \qquad 21$$

En la ecuación (21) $I_Q = |\boldsymbol{J_Q}| da_Q$ es la magnitud de la corriente que atraviesa el cilindro en Q, $\mathbf{1}_{\boldsymbol{J}}$ es el vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{J}_Q$, y $\boldsymbol{dl_Q} = dl_Q \mathbf{1}_Q$ es un vector de magnitud dl_Q en la dirección de $\boldsymbol{J}_Q$. El campo magnético resultante producido en P debido al elemento corriente $\boldsymbol{J}_Q\, dV_Q = I_Q \mathbf{1}_{\boldsymbol{Q}}$ en Q, está dado por

$$d\,\boldsymbol{H_P} = I_Q \frac{(d\,\boldsymbol{l_Q} \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}})}{4\pi r_{QP}^2} = \mathbf{1}_\perp \left(\frac{I_Q\, dl_Q \operatorname{sen}\theta}{4\pi r_{QP}^2} \right) \qquad 22$$

En forma resumida

$$dH = \frac{Idl \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2} \qquad 22a$$

La ecuación (22) es la ley de Biot-Savart con $\mathbf{1}_\perp$ como el vector unitario en la dirección de $d\,\boldsymbol{l_Q} \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}}$ (perpendicular a $\boldsymbol{dl_Q}$ y a la vez perpendicular a $\mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}}$) y θ es el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{dl_Q}$ y $\mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}}$. Como en el caso electrostático, se puede extender los resultados para tomar en cuenta una distribución fija de corrientes estáticas que puede consistir de corrientes superficiales $\boldsymbol{K}$, y líneas de corrientes I, junto con la densidad volumétrica de corriente $\boldsymbol{J}$. El campo magnético estático total en un punto P se obtiene por la superposición lineal de los efectos de cada una de estos elementos de corrientes actuando independientemente dentro de la región dada.

$$\boldsymbol{H_P} = \frac{1}{4\pi} \left[\int_V \frac{\boldsymbol{J_Q} \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}}}{r_{QP}^2} dV_Q + \int_S \frac{(\boldsymbol{K_Q} \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}})}{r_{QP}^2} + \int_l \frac{I_Q (d\,\boldsymbol{l_Q} \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{QP}})}{r_{QP}^2} \right] \qquad 23$$

En la ecuación (23) las tres integrales se extienden sobre todas las corrientes volumétricas, superficiales y lineales. La utilidad se restringe a casos en los cuales se conocen todas las distribuciones de corrientes de antemano.

El potencial escalar magnético.

Se trata del segundo caso de problemas, la clase más general en la cual la distribución de corriente estática se conoce inicialmente sólo sobre una región limitada del espacio V'. Corrientes adicionales estarán situadas fuera de V' y sobre la superficie que encierra V'. Se asume que existe una distribución arbitraria de corriente estática de densidad finita $\boldsymbol{J}$ especificada completamente sólo en todos los puntos dentro del volumen arbitrario La solución integral de $\boldsymbol{H}$ no sirve aquí ya que no se conocen las distribuciones de fuentes de corriente fuera de V'. Sin embargo, se puede utilizar las leyes de campo diferenciales en V' ya que estas son relaciones puntuales y completamente independientes de las fuentes desconocidas fuera de V'.
La ecuación vectorial de Poissón se aplica en cada punto dentro de V'. Si $\boldsymbol{A}'$ es una solución particular de la ecuación vectorial de Poissón dentro de V', entonces

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}' = -\mu_0 \boldsymbol{J} \qquad 24$$

Si $\boldsymbol{A}''$ es una función que satisface la misma ecuación con $\boldsymbol{J} \equiv \mathbf{0}$ en cada punto dentro de V' la ecuación vectorial de Laplace se satisface,

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}'' = \mathbf{0} \qquad 25$$

entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}''$ debe satisfacer la ecuación vectorial de poissón en cada punto dentro de V'

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla^2 (\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}'') = -\mu_0 \boldsymbol{J} \qquad 26$$

A la inversa, se sabe que si tanto $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}'$ satisface la ecuación vectorial de Poissón en cada punto dentro de V', su diferencia $\boldsymbol{A}''$ debe satisfacer la ecuación vectorial de Laplace,

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}'' = \mathbf{0}$$

El origen físico de la componente homogénea $\boldsymbol{A}''$ del vector de potencial debe ser fuentes ubicadas fuera de V' (y sobre la superficie S' que encierra V') actuando sólo, con cada una de las fuentes dentro de V' puesta a cero. Esto viene de $\nabla^2 \boldsymbol{A}'' = -\mu \boldsymbol{J} = \mathbf{0}$ en todos los puntos dentro de V'. Además, de la linealidad del sistema y el hecho de que $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{A}''$ representa el vector de potencial total dentro de V', entonces las fuentes excluidas de la generación de $\boldsymbol{A}''$, debe contribuir a $\boldsymbol{A}'$. $\boldsymbol{A}'$ se genera por las fuentes completamente dentro de V' actuando solas, mientras que las otras fuentes fuera de V' y sobre S' son puestas a cero. Entonces el vector de potencial $\boldsymbol{A}$ del campo magnetostático se puede tratar como la superposición lineal de los efectos de dos tipos de fuentes (1) las que están dentro de V' que conducen a una componente $\boldsymbol{A}'$, y (2) las que están fuera de V' y sobre la superficie S' que encierra V' y produce la componente homogénea $\boldsymbol{A}''$ dentro de V', con cada fuente actuando sola en ausencia de la otra.

Corrientes dentro de V' - la solución particular.

$\boldsymbol{A}'$, la componente particular de $\boldsymbol{A}$ generada completamente de fuentes conocidas dentro de V' se obtiene de la expresión integral obtenida antes con $V \rightarrow V'$. Así,

$$\boldsymbol{A}'_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{(\boldsymbol{J}_Q)}{r_{QP}} dV_Q \qquad 27$$

La componente particular correspondiente $\boldsymbol{H}'_P$ del campo magnético en un punto P dentro de V' se obtiene del rotacional de $\boldsymbol{A}'_P$, o por la expresión de Biot-Savart, con $V \rightarrow V'$.

$$\boldsymbol{H}'_P = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\boldsymbol{J}_Q \times \mathbf{1}_{QP}}{r_{QP}^2} \right) dV_Q \qquad 28$$

De esta forma la componente particular del campo magnético dentro de V' se especifica en términos de una superposición lineal de la contribución de todas las fuentes dentro de V'. Ahora se ve cómo se resuelve la parte homogénea de las soluciones del campo $\boldsymbol{H}$.

La solución homogénea y el potencial escalar magnético.

En este caso es más conveniente trabajar directamente con la componente homogénea de $\boldsymbol{H}''$ en lugar de $\boldsymbol{A}''$, y con $\boldsymbol{H}''=1/\mu_0(\nabla\times\boldsymbol{A}'')$. Como la componente homogénea $\boldsymbol{H}''$ se genera por fuentes fuera de V' o sobre S' con $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ en V', entonces $\boldsymbol{H}''$ debe ser irrotacional en todos los puntos dentro de V', así:

$$\nabla\times\boldsymbol{H}''=\boldsymbol{0} \qquad 29$$

Como en el caso electrostático, se expresa $\boldsymbol{H}''$ como el negativo del gradiente de un potencial escalar magnético φ_m,

$$\boldsymbol{H}''=-\nabla\varphi_m \qquad 30$$

La componente homogénea $\boldsymbol{H}''$ también es sin divergencia en V' ya que tanto el flujo magnético $\mu_0\boldsymbol{H}=\mu_0(\boldsymbol{H}'+\boldsymbol{H}'')$ como la componente particular $\boldsymbol{H}'$ deben ser separadamente solenoidales. Entonces, se tiene

$$\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{H}''=\mu_0(\nabla\cdot\boldsymbol{H}'')=0 \qquad 31$$

Al sustituir en la ecuación (29) se obtiene para todos los puntos dentro de V',

$$\nabla^2\varphi_m=0 \qquad 32$$

De esta manera resulta

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}'+\boldsymbol{H}''=\left[\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\left(\frac{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{Q}}\times\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{QP}}}{r_{QP}^2}\right)dV_Q-\nabla\varphi_m\right] \qquad 33$$

Además se deben recordar las condiciones de borde,

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{K} \qquad 34$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\mu_0=0 \qquad 35$$

También está claro que se debe especificar φ_m o la derivada normal de φ_m, $\partial\varphi_m/\partial n$ en cada punto a lo largo de la superficie S' que encierra V' para obtener una solución única de φ_m dentro de V'.